

Fiche 1

Généralités sur les matrices

Objectif : A la fin de ce cours, l'apprenant devra être capable de construire des matrices.

Sommaire

1.1	Introduction	1
1.2	Notion de matrice	1
1.2.1	Définitions et exemples	1
1.2.2	Matrices particulières	2

1.1 Introduction

Les matrices sont un outil mathématique de premier choix pour organiser et stocker des données. Le calcul matriciel fournit des outils et méthodes incontournables pour la modélisation dans de nombreux domaines dont les sciences naturelles. Entre autres exemples d'applications, on peut citer : (a) l'étude de la dynamique des populations (évolution dans le temps de populations humaines, animales, végétales ou microbiennes), (b) l'analyse des données statistiques en sciences naturelles et (c) la résolution des systèmes différentiels linéaires modélisant la dynamique de deux quantités évoluant avec le temps.

1.2 Notion de matrice

1.2.1 Définitions et exemples

Définition 1.1 Soient n et m deux entiers naturels non nuls. On appelle **matrice** d'ordre (n, m) , un tableau rectangulaire de nombres ayant n lignes et m colonnes et

représenté sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Les nombres $a_{11}, \dots, a_{nm}$ sont appelés les **éléments** de la matrice A où a_{ij} désigne l'élément situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j .

Exemple 1.1 Voici des exemples de matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est d'ordre $(2, 4)$, la matrice B est d'ordre $(3, 2)$ et la matrice C est d'ordre $(4, 1)$.

1.2.2 Matrices particulières

Définition 1.2 (Matrice nulle) Soient n et m deux entiers naturels. On appelle matrice *nulle*, toute matrice ne contenant que des zéros. Elle est notée $0_{n,m}$ ou, plus simplement, 0 lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur l'ordre.

Exemple 1.2 La matrice nulle d'ordre $(2, 3)$ est donnée par :

$$0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.3 (Matrice carrée) Soit n un entier naturel non nul.

- Une matrice A est dite **matrice carrée** d'ordre n si elle a n lignes et n colonnes.
- Si A est une matrice carrée d'ordre n , alors les éléments dont le numéro de ligne est égal au numéro de colonne c'est-à-dire les éléments

$$a_{11}, \dots, a_{nn}$$

sont appelés les **éléments diagonaux** de A et le vecteur $(a_{11}, \dots, a_{nn})$ est appelé la **diagonale** de A , notée $\text{diag}(A)$.

Exemple 1.3 La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

est une matrice carrée d'ordre 3 et ses éléments diagonaux de sont -1 , 0 et -5 .

Remarque 1.1 L'ensemble des matrices réelles d'ordre (n, m) est noté $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 1.4 Une matrice carrée d'ordre n , A , est dite :

- **triangulaire inférieure** si tous les éléments au dessus de la diagonale sont nuls c'est-à-dire si A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & \dots & 0 \\ * & * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \dots & \dots & \dots & * \end{pmatrix}$$

où $*$ désigne un réel quelconque (qui peut être nul).

- **triangulaire supérieure** si tous les éléments situés en dessous de la diagonale sont nuls c'est-à-dire si A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}.$$

- **triangulaire** si elle est triangulaire inférieure ou triangulaire supérieure.
- **diagonale** si tous les éléments situés en dehors de la diagonale sont nuls c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.4 On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune de ces matrices, le tableau suivant indique si elle est : triangulaire supérieure, triangulaire inférieure ou diagonale :

Matrice	Triangulaire inf.	Triangulaire sup.	Diagonale
A			
B		✓	
C	✓		
D	✓	✓	✓
E	✓	✓	✓

Définition 1.5 La **Matrice identité** d'ordre n est la matrice diagonale ne contenant que des 1 sur sa diagonale :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est simplement notée I lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur son ordre.

Exemple 1.5 Les matrices identités d'ordres 2 et 3 sont respectivement données par :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$